محاضرة رياضة رقم ١٦

1 Integration around unit circules :-

$$I = \int_0^{2\pi} f(\sin\theta , \cos\theta)\, d\theta$$

ـــ فى هذا الجزء نحاول الإستفادة من قواعد تكامل الدوال المركبة بأن نحول بعض الصور القياسية إلى تكاملات يمكن حسابها بقواعد الدوال المركبة وعكس هذه التحويلة لمعرفة التكامل المبسط.

الحالة الأولى :- تكاملات حدودها ($0 \longrightarrow 2\pi$) وتحتوى على دوال مثلثية فقط.

الفكرة

ـــ الحدود من ($0 \longrightarrow 2\pi$) أنها إذا كانت دائرة تكون قد لفت لفة كاملة فيمكن الدخول للفكرة من هذا المنظور.

$$|z| = 1 \qquad z = e^{i\theta} \qquad \frac{1}{z} = e^{-i\theta}$$

$$z = \cos\theta + i\sin\theta \longrightarrow (1)$$

$$\frac{1}{z} = \cos\theta - i\sin\theta \longrightarrow (2)$$

بجمع (1) ، (2)

$$\boxed{\begin{aligned} \cos\theta &= \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right) \\ \sin\theta &= \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right) \end{aligned}} \longrightarrow *$$

$$z = e^{i\theta} \longrightarrow dz = i e^{i\theta}\, d\theta$$

$$\boxed{d\theta = \frac{dz}{iz}} \longrightarrow (**)$$

← بتعويض من (* ، **) في أي تكامل به $\cos\theta$ ، $\sin\theta$

وحدوده ($0 \leftarrow 2\pi$) تحول المسألة إلى $\oint_{|z|=1} f(z)\,dz$ تحسب

بقانون ال (Complex).

$\boxed{Ex}$ Evaluate $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2+\sin\theta}$

$\boxed{sol}$

← تحول التكامل إلى "Complex".

$$\sin\theta = \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right) \quad ; \quad d\theta = \frac{dz}{iz} \quad ; \quad |z| = 1$$

$$I = \oint_{|z|=1} \frac{\frac{dz}{iz}}{2 + \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right)} = \oint_{|z|=1} \frac{dz}{2iz + \frac{1}{2}z^2 - \frac{1}{2}}$$

$$= \oint_{|z|=1} \frac{2\,dz}{z^2 + 4iz - 1}$$

$$\text{roots} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-4i \pm \sqrt{-16+4}}{2}$$

$Z_0 = -2i + \sqrt{3}\, i$ $\quad\quad$ $Z_1 = -2i - \sqrt{3}\, i$

$Z_0 = (-2 + \sqrt{3})i$ $\quad\quad$ $Z_1 = (-2 - \sqrt{3})i$

$|Z_0| = \sqrt{0^2 + (-2+\sqrt{3})^2 i^2}$ $\quad\quad$ $Z_1 = \sqrt{0^2 + (-2-\sqrt{3})^2 i^2}$

$Z_0 = \sqrt{3} - 2 < 1$ $\quad\quad$ $Z_1 = 2 + \sqrt{3} > 1$

تقع خارج الدائرة $\quad\quad$ تقع داخل الدائرة

$$I = \oint_{|z|=1} \frac{\frac{2\,dz}{(z-z_1)}}{z - z_0} = 2\pi i \left(\frac{2}{z_0 - z_1} \right) = \frac{4\pi i}{2\sqrt{3}\, i} = \boxed{\frac{2\pi}{\sqrt{3}}}$$

---

* الأفكار :-

١- عندما تكون زاوية الدوال n أي يظهر في المسألة $\cos n\theta$ ، $\sin n\theta$

والحدود من $0 \longrightarrow 2\pi$

$$|z| = 1 \Longrightarrow z = e^{i\theta}$$

$$z^n = e^{in\theta} \quad , \quad z^{-n} = e^{-in\theta}$$

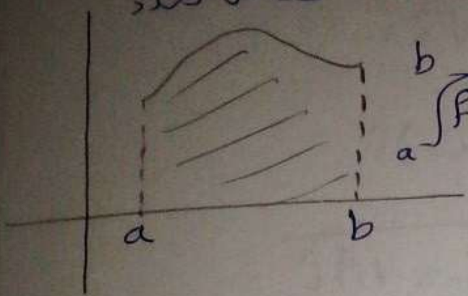
$$z^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta)$$

$$z^{-n} = \cos(n\theta) - i \sin(n\theta)$$

$$\cos(n\theta) = \frac{1}{2}\left(z^n + \frac{1}{z^n}\right) \quad , \quad \sin(n\theta) = \frac{1}{2i}\left(z^n - \frac{1}{z^n}\right)$$

$$d\theta = \frac{dz}{iz}$$

تكامل محدد



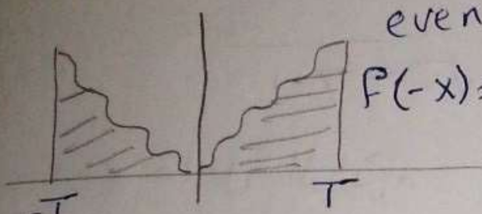
$$\int_a^b f(x)\,dx$$

٢- إذا كانت الحدود من $-2\pi \rightarrow 2\pi$

لابد أن تكون الدالة داخل التكامل زوجية.

$$f(-\theta) = f(\theta)$$

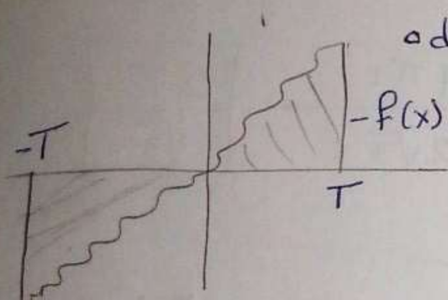
even $f(-x) = +f(x)$



ويكون:

$$\int_{-2\pi}^{2\pi} f(\sin\theta, \cos\theta) = 2\int_{0}^{2\pi} \cdots$$

odd $-f(x) = f(-x)$



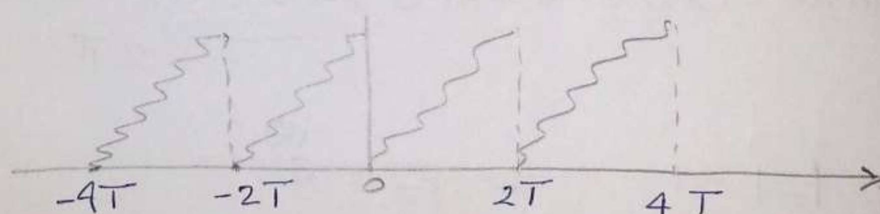
ـه ولابد أن ننظر على أسس الـ (sine) ولابد أن تكون أسس الـ (sine) زوجية

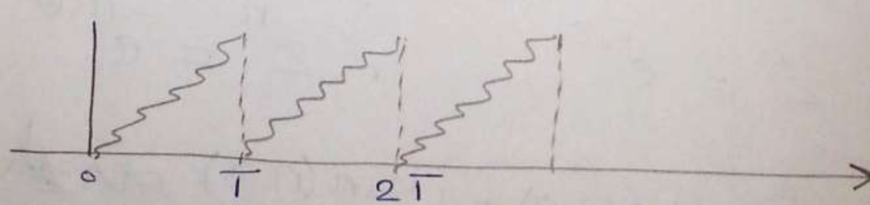
٣- إذا كانت حدود الدالة من ٠ ← π

$f(x+2T) = f(x)$

$f(x+T) = f(x)$

(even harmonic)

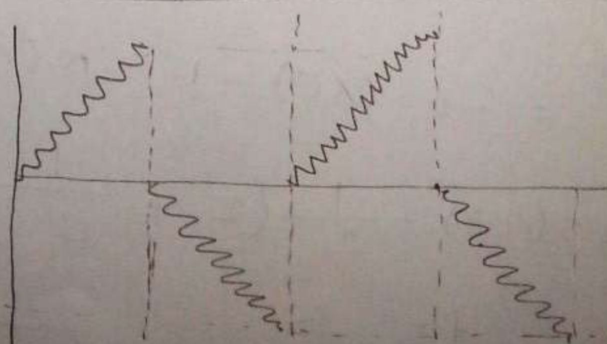




$f(x+2T) = f(x)$

$f(x+T) = -f(x)$

(odd harmonic)



س إذا كانت حدود التكامل من ٥ ← π فإن:

$$\int_0^{2\pi} f(\sin\theta, \cos\theta)\, d\theta = \begin{cases} 2\int_0^{\pi} f(\sin\theta, \cos\theta)\, d\theta & f(\theta+\pi) = f(\theta) \\ 0 & f(\theta+\pi) = -f(\theta) \end{cases}$$

$\sin(\theta+\pi) = -\sin\theta \quad ; \quad \cos(\theta+\pi) = -\cos\theta$

* $\int_0^{2\pi} = \frac{1}{2}\int_0^{\pi}$ ← إذا كانت جميع أسس $\sin\theta$ ، $\cos\theta$ زوجية.

أو مجموع الأسس في الحدود المضروبة زوجي $(\sin\theta \cos^3\theta)$

$\boxed{Ex}$ Evaluate $\quad I = \int_0^{2\pi} \frac{\cos 3\theta}{1-\cos\theta}\, d\theta$

$\boxed{\text{Solution}}$

use: $|z|=1 \Rightarrow \cos 3\theta = \frac{1}{2}\left(z^3 + \frac{1}{z^3}\right), \cos\theta = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$

$d\theta = \frac{dz}{iz}$ $\quad \therefore I = \oint_{|z|=1} \frac{\frac{1}{2}\left(z^3 + \frac{1}{z^3}\right)}{1 - \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)} * \frac{dz}{iz}$

$$I = i \oint_{|z|=1} \frac{(z^6+1)}{z^3(z^2-2z+1)}\, dz$$

$$I = i \oint_{|z|=1} \frac{(z^6+1)}{(z-0)^3\,(z-1)^2}\, dz$$

$z=0 \longrightarrow$ is Pole ~~Pom~~ of order 3.

$$\underset{z=0}{\text{Res}}\, f(z) = \frac{1}{2i} \lim_{z \to 0} \frac{d^2}{dz^2} (z-0)^3 \frac{z^6+1}{z^3(z-1)^2}$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{z \to 0} \frac{d}{dz} \frac{(z-1)^2 * 6z^5 - (z^6+1) * 2(z-1)}{(z-1)^4} = \alpha$$

$$\underset{z=1}{\text{Res}}\, f(z) = \frac{1}{1} \lim_{z \to 1} \frac{d}{dz} (z-1)^2 \frac{z^6+1}{z^3(z-1)^2} = \beta$$

$$I = 2\pi i \left[\alpha + \beta\right]$$

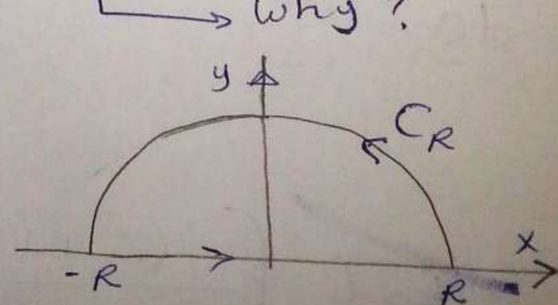
$\boxed{2}$ Integration of form $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx$

__where__ : $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$

$\deg[Q(x)] \geq \deg[P(x)] + 2 \longrightarrow$ why?

أصفار المقام لا تقع على محور x

$C = C_R \cup [-R, R]$



$$\oint_C f(z)\,dz = \int_{-R}^{R} f(x)\,dx + \int_{C_R} f(z)\,dz$$

← أسلوب التفكير :-

← نحاول تكوين منطقة جذورها منحنى هذا المنحنى جزء منه يعطي رأس المسألة ويمكن حساب تكامل الدوال المركبة عليه.

$$I = I_1 + I_2$$

I ← يحسب بقواعد ال Complex

I_1 ← يعطي الرأس عند $R \to \infty$

I_2 ← $\int_{C_R} f(z)\,dz$

← نستخدم خواص المقياس :-

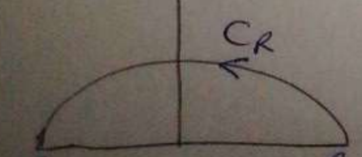
$$|z_1| - |z_2| \leq |z_1 \pm z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

← لكي نثبت أنه صفر عند $(R \to \infty)$ لأن درجة المقام أعلى من درجة البسط ونستخدم :-

$$\left|\int_{C_R} f(z)\,dz\right| \leq \int_{C_R} |f(z)|\,|dz|$$

<u>Example</u> Evaluate $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^4+1}$

← درجة المقام أعلى من درجة البسط في Z فنستخدم :-



<u>أصفار المقام</u>

$$\therefore z^4 + 1 = 0 \Rightarrow z = (-1)^{\frac{1}{4}}$$

$$(x+iy)^{\frac{1}{n}} = r^{\frac{1}{n}}\left[\cos\left(\frac{\theta \pm 2K\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\theta \pm 2K\pi}{n}\right)\right]$$

$$x=-1,\ y=0 \Rightarrow r=1 \ ,\ \theta = \tan^{-1}\frac{0}{-1} = \pi$$

$$(-1)^{\frac{1}{4}} = \cos\left(\frac{\pi + 2K\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi+2K\pi}{4}\right) \ ,\ K=0,1,2,\cdots$$

$$K=0 \Rightarrow Z_0 = \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$K=1 \Rightarrow Z_1 = \cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4} = \frac{-1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}$$

$$Z_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}} \ ,\ Z_3 = \frac{-1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}}$$

← لا يوجد جذور على محور x

$$f(z) = \frac{1}{(z-z_0)(z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)}$$

$$\int_c \frac{dz}{z^4+1} = \int_{-R}^{R}\frac{dx}{x^4+1} + \int_{C_R}\frac{dz}{z^4+1}$$

$$I = I_1 + I_2 \ ,\ I = \int_c \frac{dz}{z^4+1}$$

← . z_0 ، z_1 ← تقع داخل Contour .

← z_2 ، z_3 ← تقع داخل المنحنى .

$$\underset{z=z_0}{\operatorname{Res}} f(z) = \lim_{z \to z_0} (z-z_0) \frac{1}{(z-z_0)(z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)}$$

$$= \frac{1}{(z_0-z_1)(z_0-z_2)(z_0-z_3)} = \frac{1}{\left(\frac{2}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{2i}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{2}{\sqrt{2}} + \frac{2i}{\sqrt{2}}\right)}$$

$$\underset{z=z_1}{\operatorname{Res}} f(z) = \lim_{z \to z_1} (z-z_1) \frac{1}{(z-z_0)(z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)}$$

$$= \frac{1}{(z_1-z_0)(z_1-z_2)(z_1-z_3)} = \frac{1}{\left(\frac{-2}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{-2}{\sqrt{2}} + \frac{2i}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{2i}{\sqrt{2}}\right)}$$

$$I = 2\pi i \left(\underset{z=z_0}{\operatorname{Res}} f(z) + \underset{z=z_1}{\operatorname{Res}} f(z)\right)$$

as $R \longrightarrow \infty$

$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^4+1} \quad , \quad I_2 = \int_{C_R} \frac{dz}{z^4+1}$$

← لإثبات أن هذا التكامل = صفر أن نصل إلى أن $|I_2| \leq 0$

ولا يوجد مقياس بالسالب فلا بد أن يكون التكامل بصفر.

الخطوات

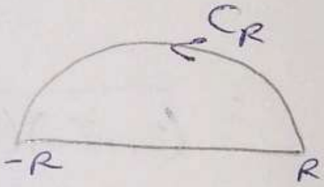
1) أن نوزع المقياس داخل التكامل.

2) أن نحافظ على أقل من ($<$).

3) لو إشارة فوق موجب نخليها سالب وإذا كانت سالب نخليها موجب حتى تكون الكمية محافظة على علاقة أقل من ($<$)

$$|I_2| \leq \int_{C_R} \frac{|dz|}{z^4+1} \leq \int_{C_R} \frac{|dz|}{|z|^4-1}$$

$$|z| = R \Rightarrow z = R e^{i\theta} \qquad 0 \leq \theta \leq \pi$$



$$dz = iR e^{i\theta} \, d\theta$$

$$|dz| = \underbrace{|i|}_{1} |R| \underbrace{|e^{i\theta}|}_{1} \, d\theta$$

$$|dz| = R \, d\theta$$

$$I_2 \leq \int_0^{\pi} \frac{R \, d\theta}{R^4-1}$$

$$R \to \infty \Rightarrow \int_0^{\pi} \frac{R}{R^4-1} \longrightarrow 0$$

$$I_2 \leq 0 \Rightarrow I_2 = 0$$

$$I_1 = I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^4+1} = 2\pi i \left(\operatorname*{Res}_{z=z_0} + \operatorname*{Res}_{z=z_1} \right)$$